Révisions & Oraux ; Série N°3

Exercice 1 Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis.

Exercice 2 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 3 [Banque CCP MP 2022]

1. Montrer que $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ à déterminer.
2. Étudier la convergence et la convergence absolue de $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

Exercice 4 [IMT MP] Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 5 Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

1. On suppose que $\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Montrer que $\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \geq 3$. Quel est le cas d'égalité ?
2. On suppose que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Montrer que $\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \geq 4$. Cas d'égalité ?

   Indication : *On pourra commencer par chercher $P \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 tP(t)\,\mathrm{d}t = 1$.*

Exercice 6 Convexité des dimensions des images itérées Soit E de dim finie et $u \in \mathcal{L}(e)$. On note $I_k = \mathrm{Im}(u^k)$. Montrer que

$$\dim I_k - \dim I_{k+1} \leq \dim I_{k-1} - \dim I_k.$$

Exercice 7 [Mines MP 2024] Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Montrer que, si m et n sont deux entiers naturels distincts, $F_m \wedge F_n = 1$.
2. Retrouver à l'aide de la question précédente que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 8 [Centrale MP 2023] On mélange les cartes d'un jeu de $2n$ cartes. Avec quelle probabilité les cartes de numéros impairs sont-elles correctement ordonnées ?

Exercice 9 [Mines MP 2024] On considére la suite réelle définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$ pour tout $n \geq 0$.

Étudier la convergence de la série $\sum(1 - x_n)$.

Exercice 10 [X MP 2024] Montrer que tout $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit sous la forme $\sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k(-2)^k$ avec $N \geq 0$ et les ε_k dans $\{0,1\}$.

Exercice 11 [X MP 2024] Quels sont les m de $\mathbb{N}^*$ tels qu'il existe m éléments consécutifs de $\mathbb{N}^*$ divisibles par des cubes d'éléments de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$?

Ind : *Lemme chinois avec n modulos.*

Révisions & Oraux ; Série N°3

Exercice 1 Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis.

Exercice 2 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 3 [Banque CCP MP 2022]

1. Montrer que $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ à déterminer.
2. Étudier la convergence et la convergence absolue de $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

Exercice 4 [IMT MP] Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 5 Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

1. On suppose que $\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Montrer que $\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \geq 3$. Quel est le cas d'égalité ?
2. On suppose que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Montrer que $\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \geq 4$. Cas d'égalité ?

   Indication : *On pourra commencer par chercher $P \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 tP(t)\,\mathrm{d}t = 1$.*

Exercice 6 Convexité des dimensions des images itérées Soit E de dim finie et $u \in \mathcal{L}(e)$. On note $I_k = \mathrm{Im}(u^k)$. Montrer que

$$\dim I_k - \dim I_{k+1} \leq \dim I_{k-1} - \dim I_k.$$

Exercice 7 [Mines MP 2024] Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Montrer que, si m et n sont deux entiers naturels distincts, $F_m \wedge F_n = 1$.
2. Retrouver à l'aide de la question précédente que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 8 [Centrale MP 2023] On mélange les cartes d'un jeu de $2n$ cartes. Avec quelle probabilité les cartes de numéros impairs sont-elles correctement ordonnées ?

Exercice 9 [Mines MP 2024] On considére la suite réelle définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$ pour tout $n \geq 0$.

Étudier la convergence de la série $\sum(1 - x_n)$.

Exercice 10 [X MP 2024] Montrer que tout $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit sous la forme $\sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k(-2)^k$ avec $N \geq 0$ et les ε_k dans $\{0,1\}$.

Exercice 11 [X MP 2024] Quels sont les m de $\mathbb{N}^*$ tels qu'il existe m éléments consécutifs de $\mathbb{N}^*$ divisibles par des cubes d'éléments de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$?

Ind : *Lemme chinois avec n modulos.*